

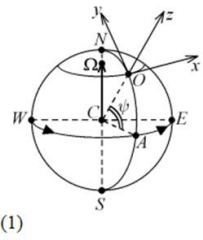


МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИДОННОЙ ЧАСТИ ВОСХОДЯЩЕГО ЗАКРУЧЕННОГО ПОТОКА

Казачинский А.О., Крутова И.Ю.

СУГД в условиях сил тяжести и Кориолиса

$$\begin{cases} c_t + uc_r + \frac{v}{r}c_\varphi + wc_z + \frac{(\gamma-1)}{2}c \left(u_r + \frac{u}{r} + \frac{v_\varphi}{r} + w_z \right) = 0 \\ u_t + uu_r + \frac{v}{r}u_\varphi - \frac{v^2}{r} + wu_z + \frac{2}{(\gamma-1)}cc_r = av - bw \cos \varphi \\ v_t + vv_r + \frac{uv}{r} + \frac{v}{r}v_\varphi + wv_z + \frac{2}{(\gamma-1)}\frac{c}{r}c_\varphi = -au + bw \sin \varphi \\ w_t + ww_r + \frac{v}{r}w_\varphi + ww_z + \frac{2}{(\gamma-1)}cc_z = bu \cos \varphi - bv \sin \varphi - g \end{cases} \quad (1)$$



t, r, φ, z - неизвестные переменные (r, φ - полярные координаты в xOy)
 c, u, v, w - искомые функции
 a, b - коэффициенты для учета ускорения Кориолиса
 g - ускорение свободного падения

Начальные и краевые условия в рассматриваемой задаче

$$\begin{cases} c(t, r, \varphi, z)|_{z=0} = c_0(t, r, \varphi) \\ u(t, r, \varphi, z)|_{z=0} = u_0(t, r, \varphi) \\ v(t, r, \varphi, z)|_{z=0} = v_0(t, r, \varphi) \\ w(t, r, \varphi, z)|_{z=0} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Получилась характеристическая задача Коши, где $z=0$ контактная характеристика кратности два. Эта задача имеет единственное аналитическое решение при выполнении необходимых условий разрешимости характеристическая задача Коши и задании двух дополнительных условий

$$\begin{cases} u(t, r, \varphi, z)|_{r=r_{in}} = u^o(t, \varphi, z); \\ v(t, r, \varphi, z)|_{r=r_{in}} = v^o(t, \varphi, z); \quad r_{in} = \text{const} > 0 \end{cases} \quad (3)$$

При соответствующих условиях согласования

$$\begin{cases} u_0(t, r, \varphi)|_{r=r_{in}} = u^o(t, \varphi, z)|_{z=0} \\ v_0(t, r, \varphi)|_{r=r_{in}} = v^o(t, \varphi, z)|_{z=0} \end{cases} \quad (4)$$

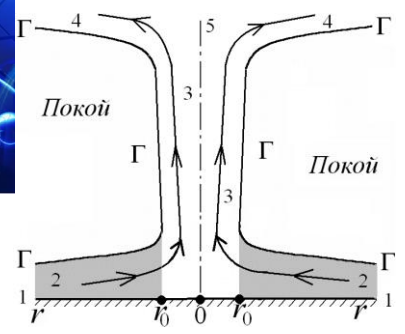
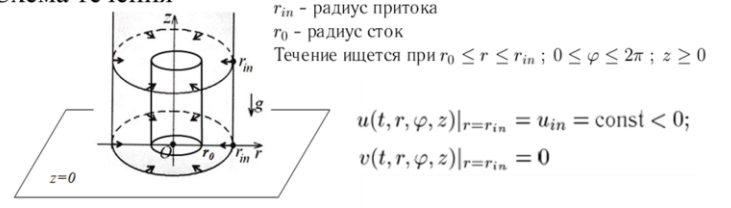


Схема течения



Решение задачи (1) - (4)

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} v \\ w \\ c \\ u \end{pmatrix}$$

можно представить в виде

$$\mathbf{U}(t, r, \varphi, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{U}_k(t, r, \varphi) \frac{z^k}{k!}; \quad \mathbf{U}_k(t, r, \varphi) = \frac{\partial^k \mathbf{U}(t, r, \varphi, z)}{\partial z^k} \Big|_{z=0} \quad (5)$$

Положим в СУГД $z=0$, учтем начальные условия

$$\begin{cases} c_{0t} + u_0 c_{0r} + \frac{v_0}{r} c_{0\varphi} + \frac{(\gamma-1)}{2} c_0 \left(u_{0r} + \frac{u_0}{r} + \frac{v_{0\varphi}}{r} + w_1 \right) = 0, \\ u_{0t} + u_0 u_{0r} + \frac{v_0}{r} u_{0\varphi} - \frac{v_0^2}{r} + \frac{2}{(\gamma-1)} c_0 c_{0r} = a v_0, \\ v_{0t} + u_0 v_{0r} + \frac{u_0 v_0}{r} + \frac{v_0}{r} v_{0\varphi} + \frac{2}{(\gamma-1)} \frac{c_0}{r} c_{0\varphi} = -a u_0, \\ \frac{2}{(\gamma-1)} c_0 c_1 = b u_0 \cos \varphi - b v_0 \sin \varphi - g. \end{cases} \quad (6)$$

Получаем из (6)

$$\begin{cases} w_1 = -\frac{2}{(\gamma-1)c_0} \left(c_{0t} + u_0 c_{0r} + \frac{v_0}{r} c_{0\varphi} \right) - u_{0r} - \frac{u_0}{r} - \frac{v_{0\varphi}}{r} \\ c_1 = \frac{(\gamma-1)}{2c_0} (b u_0 \cos \varphi - b v_0 \sin \varphi - g) \end{cases} \quad (7)$$

Заключение

Поставлена газодинамическая задача. Используется проверенная математическая модель: СУГД с единственным исходным упрощением – предположением об изэнтропичности исследуемых течений.

Для СУГД – квазилинейной системы уравнений с частными производными – поставлены конкретные начально-краевые задачи, которые соответствуют газодинамическому смыслу рассматриваемых задач.

Задача рассматривается в случае t, r, φ, z . Решение представлено аналитически в виде начального отрезка сходящегося ряда по степеням z , а коэффициенты зависят от t, r, φ . Используется метод частичного разделения переменных. Получены системы гиперболических уравнений для коэффициентов рядов по четвертый коэффициент включительно.

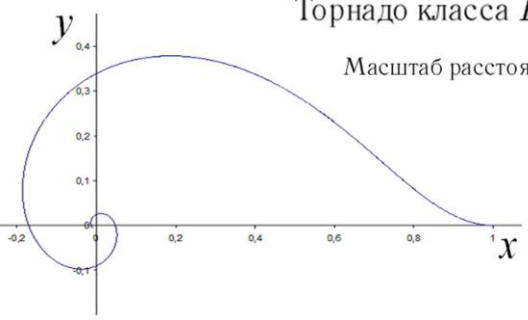
Численное построение решений рассматриваемых начально-краевых задач для СУГД проводится при решении систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Правильность работы вычислительных программ установлена как сопоставлением результатов расчетов, проведенных разными исследователями по своим персональным программам, так и стандартными для численных методов приемами (сравнение с тестовыми примерами в стационарном случае).

Некоторые результаты расчетов

Проекция отдельных траекторий

Торнадо класса F3

Масштаб расстояния: $r_{00} = 16 \text{ км}$



Тропический циклон

Масштаб расстояния: $r_{00} = 73 \text{ км}$

