ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЧАСТНОГО РЕШЕНИЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ ПРИ УЧЕТЕ ДЕЙСТВИЯ СИЛЫ КОРИОЛИСА

Бугаенко А.А., Крутова И. Ю.
ФГАОУ ВО «Снежинский физико-технический институт Национального исследовательского ядерного университета МИФИ», Челябинская обл.
bugaenkoanya@yandex.ru, IYKrutova@mephi.ru

Аннотация. Для системы уравнений газовой динамики при учёте действия силы Кориолиса проведена линеаризация в случае, когда не учитывается действие силы тяжести. Найдено частное решение в виде бегущей волны. Полученное решение моделируется численным методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности.

Ключевые слова: система уравнений газовой динамики, сила Кориолиса, линеаризация, точное решение, метод Рунге-Кутты.

NUMERICAL SIMULATION OF A PARTICULAR SOLUTION OF A LINEARIZED SYSTEM OF GAS DYNAMICS EQUATIONS WITH THE CORIOLIS FORCE TAKEN INTO ACCOUNT

Bugaenko A. A., Krutova I. Yu.
Snezhinsk Physics Technology Institute of the National Research Nuclear University MEPhI, Chelyabinsk region

Abstract. For the system of equations of gas dynamics, when taking into account the action of the Coriolis force, linearization is performed in the case when the action of gravity is not taken into account. A particular solution in the form of a traveling wave is found. The resulting solution is modeled by the fourth-order Runge-Kutta numerical method.

Key words: system of equations of gas dynamics, the Coriolis force, linearization, an accurate solution, method is Runge-Kutta.

Система уравнений газовой динамики в изэнтропическом случае для идеального политропного газа с уравнением состояния $p = \rho\gamma/\gamma$ при учете действия силы Кориолиса и силы тяжести имеет следующий вид [1, 3, 4-6]:

$$\begin{cases} c_t + v_1 c_x + v_2 c_y + v_3 c_z + \frac{\gamma-1}{2} c\left(v_{1x} + v_{2y} + v_{3z}\right) = 0, \\ v_{1t} + v_1 v_{1x} + v_2 v_{1y} + v_3 v_{1z} + \frac{2}{\gamma-1} c c_x = a v_2 - b v_3, \\ v_{2t} + v_1 v_{2x} + v_2 v_{2y} + v_3 v_{2z} + \frac{2}{\gamma-1} c c_y = -a v_1, \\ v_{3t} + v_1 v_{3x} + v_2 v_{3y} + v_3 v_{3z} + \frac{2}{\gamma-1} c c_z = b v_1 - g. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь: p – давление газа; ρ – плотность газа; γ = const > 1 – показатель политропы идеального газа; $c = \rho(\gamma-1)/2$ – скорость звука газа; V = ($v1$, $v2$, $v3$) вектор скорости газа с его проекциями на декартовы оси Ox, Oy, Oz; Ω = (0; Ω2; Ω3) ; Ω2 = Ωcos ψ; Ω3 = Ωsin ψ, – вектор угловой скорости вращения Земли вокруг своей оси; ψ – широта точки, в которой находится начало декартовой системы координат (x, y, z), вращающейся вместе с ЗемлЕй; a = 2Ω3; b = 2Ω2; g = (0, 0,−g), g = const > 0 – ускорение свободного падения. В данной работе g = 0.

В системе (1) с помощью масштабных значений скорости, скорости звука, времени и расстояния – u00, c00, t00, r00 – стандартным образом [1, 3, 4-6] введены безразмерные переменные: f = f^* / f_{00}, где f^* и f_{00} соответственно размерное и масштабное значения безразмерной величины f. При это положено, что u00 = c00; t00 = r00 / u00.

У системы (1) в случае $g = 0$ имеется точное решение:

$$c = 1,\ \upsilon_1 = \upsilon_2 = \upsilon_3 = 0. \qquad (2)$$

Линеаризация системы (1) на точном решении (2) состоит в том, что решение этой системы представляется в виде c = 1 + $\tilde{c}$; V = $\tilde{V}$ и эти выражения подставляются в систему (1).

В результате получается следующая линейная система уравнений с частными производными, где для простоты знак тильды опущен [2]:

$$\begin{cases} c_t + 0.5(\gamma - 1)c(\upsilon_{1x} + \upsilon_{2y} + \upsilon_{3z}) = 0, \\ \upsilon_{1t} + 2c_x/(\gamma - 1) = a\upsilon_2 - b\upsilon_3, \\ \upsilon_{2t} + 2c_y/(\gamma - 1) = -a\upsilon_1, \\ \upsilon_{3t} + 2c_z/(\gamma - 1) = b\upsilon_1. \end{cases} \qquad (3)$$

Для построения частных точных решений предполагается, что они не зависят от переменных x и z и имеют следующий вид

$$\begin{cases} c(t, y) = c_n(t)\cos ny, \\ \upsilon_1(t, y) = \upsilon_{1n}(t)\sin ny, \\ \upsilon_2(t, y) = \upsilon_{2n}(t)\sin ny, \\ \upsilon_3(t, y) = \upsilon_{3n}(t)\sin ny. \end{cases} \qquad (4)$$

с искомыми коэффициентами $c_n(t)$, $\upsilon_{1n}(t)$, $\upsilon_{2n}(t)$, $\upsilon_{3n}(t)$.

Подстановка представлений (4) в систему (3) при условии, что $\partial/\partial x = \partial/\partial z = 0$, и приведение подобных дают следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} c_n^{'}(t) + .0.5(\gamma - 1)\upsilon_{2n}(t) = 0, \\ \upsilon_{1n}^{'}(t) = a\upsilon_{2n}(t) - b\upsilon_{3n}(t), \\ \upsilon_{2n}^{'}(t) - 2nc_n(t)/(\gamma - 1) = -a\upsilon_{1n}(t), \\ \upsilon_{3n}^{'}(t) = b\upsilon_{1n}(t). \end{cases} \qquad (5)$$

Решение системы (5) будем искать в виде

$$\begin{cases} c_n(t) = c_n^0 \cos(n\upsilon^* t), \\ \upsilon_{1n}(t) = \upsilon_{1n}^0 \cos(n\upsilon^* t), \\ \upsilon_{2n}(t) = \upsilon_{2n}^0 \sin(n\upsilon^* t), \\ \upsilon_{3n}(t) = \upsilon_{3n}^0 \sin(n\upsilon^* t). \end{cases} \qquad (6)$$

Представление (6) подставляется в систему (5) и получается однородная система линейных алгебраических уравнений для констант c_n^0 , υ_{1n}^0, υ_{2n}^0, υ_{3n}^0. Чтобы эта система имела ненулевое решение, необходимо, чтобы ее определитель равнялся нулю. В результате получаем четыре действительных попарно-сопряженных корня:

$$\upsilon_{1,2,3,4}^* = \pm\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + n^2 \pm \sqrt{(a^2 + b^2 + n^2)^2 - 4n^2b^2}}{2n^2}} > 0.$$

С использованием соответствующих тригонометрических формул получается, что найденное частное решение системы (3) является бегущей волной

$$\begin{cases} c(t, y) = 0.5c_n^0 \left(\cos[n(y + \upsilon^* t)] + \cos[n(y - \upsilon^* t)]\right), \\ \upsilon_1(t, y) = 0.5\upsilon_{1n}^0 \left(\sin[n(y + \upsilon^* t)] + \sin[n(y - \upsilon^* t)]\right), \\ \upsilon_2(t, y) = 0.5\upsilon_{2n}^0 \left(\cos[n(y + \upsilon^* t)] - \cos[n(y - \upsilon^* t)]\right), \\ \upsilon_3(t, y) = 0.5\upsilon_{3n}^0 \left(\cos[n(y + \upsilon^* t)] - \cos[n(y - \upsilon^* t)]\right), \end{cases}$$

распространяющейся в разные стороны со скоростью

$$\upsilon_1^* = \sqrt{\frac{a^2+b^2+n^2+\sqrt{\left(a^2+b^2+n^2\right)^2-4n^2b^2}}{2n^2}} > 1,$$

$$\upsilon_2^* = \sqrt{\frac{a^2+b^2+n^2-\sqrt{\left(a^2+b^2+n^2\right)^2-4n^2b^2}}{2n^2}} < 1.$$

Причем $\upsilon_2^* < 1 < \upsilon_1^*$, если выполнено неравенство (для Северного полушария)

$$\sin^2\psi - \cos^2\psi \geq 0, \; -\pi/2 \leq \psi \leq -\pi/4 .$$

Полученная система решается численно методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности для построения линий тока.

Исходные данные приведены в таблице 1.

Параметр	Размерное значение	Безразмерное значение
c_{00}	333 м/с	1
x_{00}	8200 м	1
$t_{00} = r_{00}/c_{00}$	24.62 с	1
Ω	0.0000727 $с^{-1}$	0.0017898
$sin\psi$	0.7071	0.7071

Табл.1 Значения параметров для торнадо класса F2

На рисунке 1 приведен график линии тока с начальными условиями x0=10^{-7}, y0=0.1, z0=10^{-7}. На графиках черным маркером обозначена – начальная точка, красным – конечная точка расчета. Видно, что движение идет против хода часовой стрелки. Это поведение и вид линии характерны при любых начальных условиях.

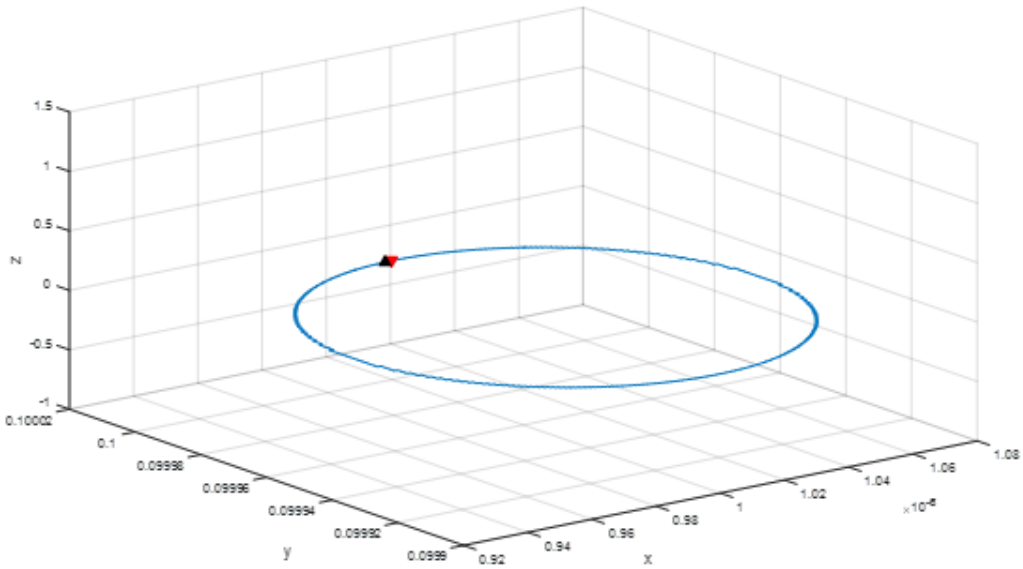

Рис. 1 Линия тока

На рисунке 2 приведен график, показывающий как меняется скорость при приближении к тем или иным широтам.

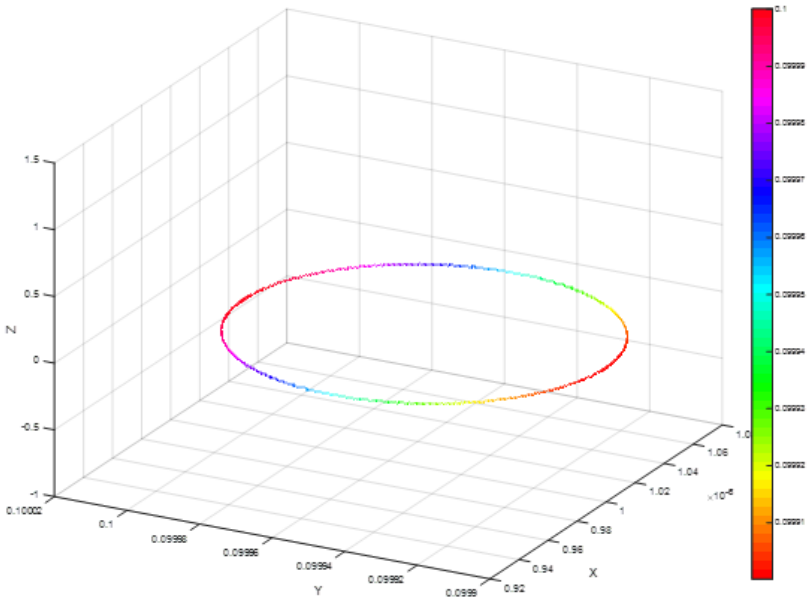

Рис. 2 Линия тока

Использованные источники:

1. Баутин, С. П. Газодинамическая теория восходящих закрученных потоков : монография / С. П. Баутин, И. Ю. Крутова, А. Г. Обухов. – Екатеринбург: УрГУПС, 2020.
2. Баутин, С. П. Аналитическое и численное моделирование течений газа при учете действия силы Кориолиса : монография / С. П. Баутин, И. Ю. Крутова. – Екатеринбург: УрГУПС, 2019.
3. Баутин, С. П. Линеаризованная система уравнений газовой динамики при учете действия силы Кориолиса: препринт / С. П. Баутин, И. Ю. Крутова. – Снежинск: СФТИ НИЯУ МИФИ, 2019.
4. Баутин, С. П. Разрушительные атмосферные вихри и вращение Земли вокруг своей оси : монография / С. П. Баутин и др. – Екатеринбург: УрГУПС, 2017.
5. Баутин, С. П. Разрушительные атмосферные вихри: теоремы, расчеты, эксперименты / С. П. Баутин и др. – Новосибирск : Наука; Екатеринбург: УрГУПС, 2013.
6. Баутин, С. П. Торнадо и сила Кориолиса / С. П. Баутин. – Новосибирск: Наука, 2008.
7. Баутин, С. П. Характеристическая задача Коши и ее приложения в газовой динамике / С. П. Баутин. – Новосибирск: Наука, 2009.
8. Баутин, С. П., Характеристическая задача Коши для квазилинейной аналитической системы / С. П. Баутин. // Дифференциальные уравнения, - 1976. - Том 12. - № 11. - С. 2052-2063.