

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫСОКОСКОРОСТНОГО СОУДАРЕНИЯ ПОЛИМЕРНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Шестаковская Е.С., Клиначева Н.Л., Яловец А.П.

ФГАОУ ВО «Южно-Уральский государственный университет (НИУ)»,  
Челябинск, Челябинская обл.  
[leshest@list.ru](mailto:leshest@list.ru)

Аннотация. Для описания ударно-волновых процессов в полимерных материалах построена математическая модель упругопластической среды на основе модели пластичности Прандтля-Рейса, отличительной особенностью которой является отсутствие эмпирических констант. Построено уравнение состояния адекватно описывающее поведение полимерного материала в условиях динамических нагрузок. Результаты численного моделирования течений среды при скоростном соударении полимерных материалов согласуются с экспериментальными данными.

*Ключевые слова: модель упругопластической среды, модель Прандтля-Рейса, уравнение состояния, полиметиметакрилат*

## SIMULATION OF THE POLYMERIC MATERIALS HIGH SPEED IMPACT

Shestakovskaya E.S., Klinacheva N.L., Yalovets A.P.

FSAEIHЕ “South Ural State University (national research university)”,  
Chelyabinsk, Chelyabinsk region  
[leshest@list.ru](mailto:leshest@list.ru)

To describe shock-wave processes in polymeric materials, a mathematical model of an elastoplastic medium is built on the basis of the Prandtl-Reis plasticity model, a distinctive feature of which is the absence of empirical constants. An equation of state is constructed that adequately describes the behavior of a polymer material under dynamic loads. The results of numerical simulation of medium flows at high-speed impact of polymeric materials are consistent with experimental data.

*Key words: model of elastoplastic medium, Prantl-Reis model, equation of state, polymethymethacrylate*

Полимерные материалы широко используются в качестве элементов конструкций при исследовании ударно-волновых и детонационных процессов. В связи с этим актуальным является математическое моделирование поведения полимерных материалов в условиях больших скоростей деформации. Система уравнений, описывающая одномерные упругопластические течения, в лагранжевых координатах имеет стандартный вид:

$$\dot{\rho} = -\rho \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \rho \dot{v} = \frac{\partial}{\partial z} (S_{zz} - P), \quad \rho \dot{E} = (-P + S_{zz}) \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \dot{S}_{zz} = \frac{4\mu}{3} \frac{\partial v}{\partial z} \quad (1)$$

где  $\rho$  – плотность,  $v$  – скорость,  $P$  – давление,  $S_{zz}$  – z компонента тензора девиатора напряжений,  $E$  – внутренняя энергия единицы массы,  $\mu$  – модуль сдвига.

Для описания пластических течений применяются различные эмпирические модели. Наиболее часто применяется условие текучести Мизеса, которое ограничивает сдвиговые напряжения на пределе текучести. Для этого уравнения для упругих напряжений дополняют условием текучести:  $S_{ik}^2 \leq 2Y_0^2/3$ , где  $Y_0$  – предел текучести для простого растяжения.

Более детальное описание пластических течений реализовано в модели Прандтля-Рейса [1,2], в которой явно фигурирует тензор скоростей пластических деформаций:

$$\dot{S}_{ik} = 2\mu(\hat{v}_{ik} - \dot{u}_{ik}^p) \quad (2)$$

где  $\hat{v}_{ik} = v_{ik} - v_{ll}\delta_{ik}/3$ ,  $v_{ik}$  - тензор скоростей деформаций,  $\dot{u}_{ik}^p$  - тензор скоростей пластических деформации, который связан с напряжениями уравнениями Мизеса  $\dot{u}_{ik}^p = S_{ik}/\lambda$ ,  $\lambda$  - модуль пластичности. Выражение (2) отражает тот факт, что за упругие напряжения отвечают только упругие деформации.

Из уравнений Мизеса и (2) следует уравнение для тензора девиатора напряжений:

$$\dot{S}_{ik} + S_{ik}/\tau^p = 2\mu\hat{v}_{ik} \quad (3)$$

где  $\tau^p = \lambda/2\mu$  - время релаксации упругих напряжений за счет пластических течений (максвелловское время релаксации).

В одномерной геометрии уравнение (3) будет иметь вид  $\dot{S}_{zz} + S_{zz}/\tau^p = 4\mu v_{zz}/3$ . В этом случае модуль пластичности определяется выражением  $1/\lambda = 3S_{zz}v_{zz}/2Y_0^2$  при  $S_{zz}v_{zz} > 0$ , то есть при деформациях, приводящих к росту напряжений.

Заметим, что уравнения (3) имеет тот же вид, что и уравнения для напряжений в модели вязкоупругой среды (модель Максвелла) [3], и, следовательно, дает правильное описание как быстрых, так и медленных движений среды. Однако в отличие от модели Максвелла модель Прандтля-Рейса не требует введения дополнительного подгоночного параметра – вязкости.

Система уравнений (1) должна замыкаться уравнением состояния исследуемого материала. Для построения уравнения состояния ПММА воспользуемся подходом Ми-Грюнайзена, согласно которому мы представили давление и внутреннюю энергию в виде суммы упругой (холодной) и тепловой составляющих:

$$P(V, E) = P_x(V) + \frac{\Gamma(V)}{V}(E - E_x(V)) \quad (4)$$

где  $P_x = -dE_x/dV$ ,  $E_x$  – упругие составляющие давления и энергии при  $T = 0K$ .

Для аналитического описания кривой холодного сжатия в данной работе была использована формула Тета [4], коэффициент Грюнайзена – в виде [5]. В этом случае уравнение (4) содержит лишь две константы, которые определяются из условия совпадения теоретической ударной адиабаты конденсированного вещества с экспериментальной адиабатой.

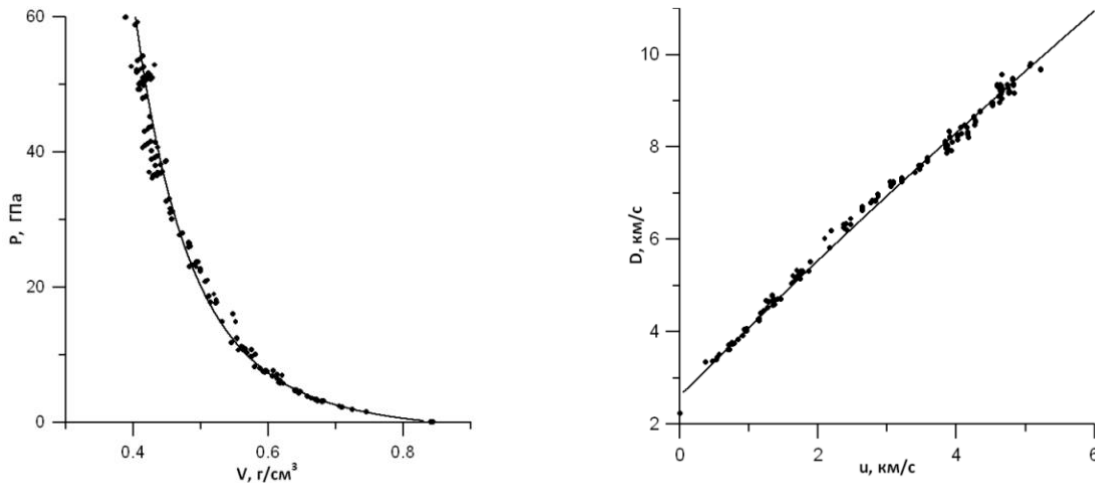


Рис.1. Ударная адиабата ПММА. Сплошные линии – расчет по уравнению состояния, построенному в данной работе, точки – эксперимент [6].

На рис.1. представлена ударная адиабата в координатах  $(P - V)$  и  $(D - u)$ , где  $D$  – скорость ударной волны,  $u$  – массовая скорость. Таким образом, построенное уравнение состояния адекватно описывает экспериментальные данные по ударной сжимаемости ПММА в широком диапазоне давлений.

Для численного решения предложенной математической модели использовался полуаналитический метод [7]. Верификация математической модели проводилась по экспериментальным данным [8], в которых моделируется соударение двух пластин. В первом случае моделировался удар пластины из кварцевого стекла по мишени из ПММА (рис.2.а), где толщина ударника из плавленого кварца была номинально 6,5 мм, толщина образца ПММА –

6,35 мм. Во втором случае материалом ударника и мишени являлся ПММА (Рис.2.б), где толщина ударника и образца были номинально 6,35 мм. Отметим, что в работе [8] построены усредненные кривые, которые обобщают набор экспериментальных данных.

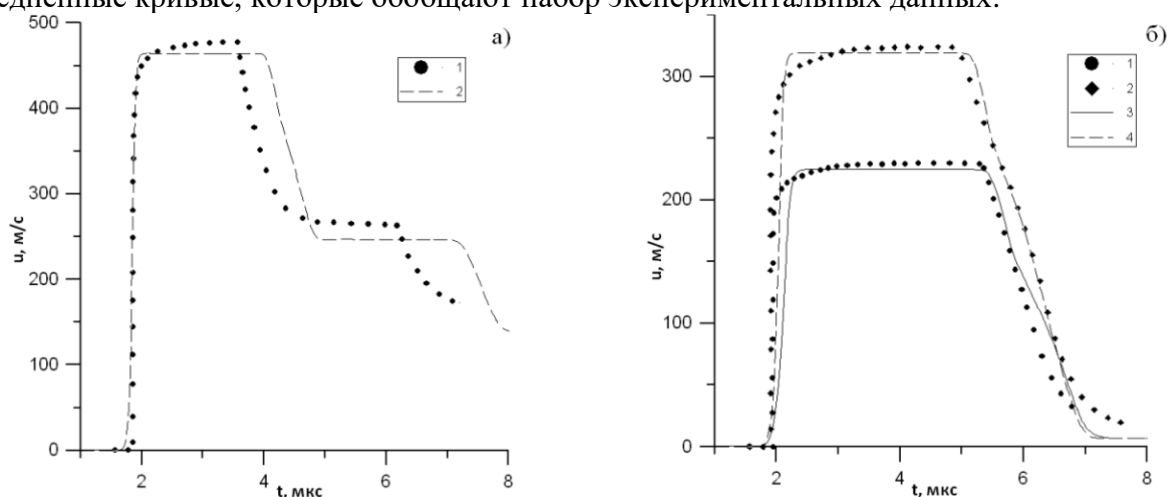


Рис.2. Зависимости от времени скорости на свободной поверхности образца. Рис.2а: точки 1 – эксперимент, линия 2 – расчет при скорости удара 615 м/с. Рис.2б: точки 1 – эксперимент, линия 3 – расчет при скорости удара 450 м/с; точки 2 – эксперимент, линия 4 – расчет при скорости удара 640 м/с.

Рассчитанная форма фронта волны на рис.2а качественно хорошо согласуется с экспериментальными данными. Результаты расчетов на рис.2.б хорошо согласуются с экспериментом, как в области ударной волны, так и волны разрежения.

Таким образом, сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными показало, что построенная математическая модель дает правильное описание ударно-волновых процессов в полимерных материалах.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Челябинской области в рамках научного проекта № 20-41-740006.*

#### *Литература:*

1. Prandtl, L. Spannungsverteilung in plastischen korper. / L. Prandtl // Proc. 1st Int. Congr. Appl. Mech. Delft. – 1924. – P. 43.
2. Рейс, А. Учет упругой деформации в теории пластичности. Теория пластичности / А. Рейс. – Москва: Издательство иностранной литературы, 1948. – 260 с.
3. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика. Т. VII. Теория упругости / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – Москва: Наука, 1987. – 246 с.
4. Баум, Ф.А. Физика взрыва / Ф.А. Баум, К.П. Станюкович, Б.И. Шехтер. – Москва: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. – 800 с.
5. Ковалев, Ю. Определение вида коэффициента Грюнайзена для молекулярных кристаллов / Ю. Ковалев // Доклады Академии наук. – 2005. – Т.403. – № 4. – С. 475–477.
6. LASL Shock Hugoniot Data / Ed. S.P. Marsh; Berkeley: University of California Press, 1980. – 658 p.
7. Яловец, А. Расчет течений среды при воздействии интенсивных потоков заряженных частиц / А. Яловец // Прикладная механика и техническая физика. – 1997. – Т.38. – № 1. – С. 151–166.
8. Barker, L., Hollenbach, R. Shock-wave studies of PMMA, fused silica, and sapphire / L. Barker, R. Hollenbach // J. Appl. Phys. – 1970. – V.18. – P.277–293.