

## ЧИСЛЕННОЕ СРАВНЕНИЕ НЕКОТОРЫХ СХЕМ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА ПОДВИЖНЫХ СЕТКАХ

Мустафин А. М.<sup>1</sup>, Пашенцева Н. Н.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> ФГАОУ ВО «Снежинский физико-технический институт Национального исследовательского ядерного университета МИФИ», Челябинская обл.,

<sup>2</sup> ФГУП «РФЯЦ-ВНИИТФ им. академ. Е.И. Забабахина», Снежинск, Челябинская обл.  
[geologtema@mail.ru](mailto:geologtema@mail.ru)

Аннотация. В работе рассмотрены две конечно-разностные схемы для численного решения уравнения теплопроводности в одномерной плоской постановке: классическая трехточечная схема с весами и схема «Ромб». Для выбранных схем проведено численное исследование сходимости результатов на сгущающейся пространственной сетке с учетом динамической адаптации сетки к решению по фронту тепловой волны. Для работы с адаптивной сеткой была разработана гибридная структура данных, совмещающая в себе двусвязный список и бинарные деревья. На основе полученных результатов показано преимущество в точности подвижных адаптивных сеток перед использованием основных постоянных разностных сеток.

*Ключевые слова: теплопроводность, подвижные адаптивные сетки, разностная схема ромб, трехточечная схема с весами, гибридная структура данных.*

## NUMERICAL COMPARISON OF SOME SCHEMES FOR SOLVING THE HEAT EQUATION ON MOBILE GRIDS

Mustafin A. M.<sup>1</sup>, Pashentseva N. N.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Snezhinsk Physics Technology Institute of the National Research Nuclear University MEPhI, Chelyabinsk region

<sup>2</sup> FSUE RFNC-VNIITF named after academician E. I. Zababakhin, Snezhinsk.  
[geologtema@mail.ru](mailto:geologtema@mail.ru)

Abstract. In this paper, we consider two finite-difference schemes for the numerical solution of the heat equation in a one-dimensional plane formulation: the classical three-point scheme with weights and the "Rhombus" scheme. For the selected schemes, a numerical study of the convergence of results on a thickening spatial grid is performed, taking into account the dynamic adaptation of the grid to the solution along the heat wave front. To work with an adaptive grid, we developed a hybrid data structure that combines a doubly linked list and binary trees. Based on the results obtained, the advantage in accuracy of mobile adaptive grids over the use of basic constant difference grids is shown.

*Key words: heat conduction, mobile adaptive grids, finite difference scheme the rhombus, the three-point scheme with weights, the hybrid data structure.*

**Введение.** На сегодняшний день существует множество задач о распространении тепла в веществе. Такие задачи чаще всего сводятся к решению уравнений теплопроводности из семейства параболических уравнений [4]. Рассмотрим численное моделирование решения одномерного уравнения теплопроводности с нелинейностью по коэффициенту теплопроводности, а также исследуем возможности введения адаптации при использовании разностных схем.

**Постановка задачи.** Рассматривается дифференциальное уравнение вида:

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \chi \frac{\partial T}{\partial x} \right) + f, \quad (1)$$

где  $T(x, t)$  - температура,  $\varepsilon(\rho, T)$  - удельная внутренняя энергия,  $\rho(x)$  - плотность,  $\chi(\rho, T)$  - коэффициент теплопроводности,  $f(x, t)$  - плотность тепловых источников.

Исследуется случай, когда  $\varepsilon(\rho, T) = C_V \cdot T$  при условии  $C_V = \rho = 1$ .

В области  $G = [a \leq x \leq b] \times [0 < t \leq T]$  для уравнения (1) решаем краевую задачу:

$$\begin{aligned} T(x, 0) &= \varphi_0(x), \quad a \leq x \leq b, \\ \alpha' T(a, t) + \beta' S(a, t) &= \psi_1(t), \\ \alpha'' T(b, t) - \beta'' S(b, t) &= \psi_2(t), \end{aligned} \quad 0 < t \leq T,$$

где  $\varphi_0(x)$  - заданное начальное распределение температуры,  $\psi_1(t), \psi_2(t)$  - заданные функции на краях системы,  $\alpha', \beta', \alpha'', \beta''$  - параметры, с помощью которых можно задавать различные граничные условия.

**Метод конечных разностей.** На заданной области вводим разностную сетку

$$\omega_{ht} = \omega_h \times \omega_\tau, \quad \omega_h = \{x_k = k \cdot h, k = 0, 1, 2, \dots\}, \quad \omega_\tau = \{t_j = j \cdot \tau, j = 0, 1, 2, \dots\}$$

с шагами  $h$  (по  $x$ ) и  $\tau$  (по  $t$ ).

*Классическая трехточечная схема* с весами [3] ( $\sigma$  - заданный вес):

$$\begin{aligned} \frac{T_{k+1/2}^{j+1} - T_{k+1/2}^j}{\tau} &= \frac{\sigma}{h^2} \left( \chi_{k+1}^{j+1} T_{k+3/2}^{j+1} - 2(\chi_{k+1}^{j+1} + \chi_k^{j+1}) T_{k+1/2}^{j+1} + \chi_k^{j+1} T_{k-1/2}^{j+1} \right) + \\ &+ \frac{(1-\sigma)}{h^2} \left( \chi_{k+1}^j T_{k+3/2}^j - 2(\chi_{k+1}^j + \chi_k^j) T_{k+1/2}^j + \chi_k^j T_{k-1/2}^j \right) + \varphi_k^j. \end{aligned} \quad (2)$$

На достаточно гладких решениях она имеет порядок аппроксимации:  $O\left(h^2 + \tau\left(\sigma - \frac{1}{2}\right) + \tau^2\right)$ .

Для уравнения (1), записанного в потоковой форме, строится *схема «Ромб»* [2]:

$$\begin{cases} \frac{T^{j+1} - T^j}{\tau} = -\frac{1}{h} \Delta(S^{j+1}) + f^{j+1/2} \\ S^{j+1} = -\frac{\chi^j}{h} \Delta T^{j+1} \end{cases}, \quad (3)$$

где  $\Delta(o) = ((o)_{k+1} - (o)_k)$ , величины, не входящие в оператор  $\Delta$ , относятся к центру ячеек. На гладких решениях схема имеет порядок аппроксимации  $O(h^2 + \tau)$ .

**Адаптация разностной сетки.** Известно, что измельчение разностной сетки ведет к повышению точности численного решения. Однако это приводит также к увеличению объема данных и времени счета. В таком случае можно прибегнуть к *механизму адаптации разностной сетки*, измельчая ее не на все области определения, а лишь на определенном участке.

Используем исходную разностную сетку, скорректировав только пространственный параметр  $\omega_h = \left\{ x_k = \frac{k \cdot h}{l}, k = 0, 1, 2, \dots, K; l = 2^L; L = 0, 1, 2 \right\}$ , где  $L$  - уровень адаптации. То есть

при повышении уровня адаптации по заданному условию исходные ячейки делятся пополам, а температура ячеек *потомков* [1] определяется формулой  $T_{(k)_{L+1}} = T_{(k+1)_{L+1}} = T_{(k)_L}$ . Как только измельченные ячейки перестают выполнять условие дробления, необходимо восстановить этот участок сетки до исходной. Температура в ячейках *родителей* [1] в таком случае определяется формулой:  $T_{(k)_L} = 0.5 \cdot (T_{(k)_{L+1}} + T_{(k+1)_{L+1}})$ .

Для реализации адаптации разработана гибридная структура данных, совмещающая в себе *двусвязный список* и *бинарное дерево* [1]. Двусвязный список хранит в себе набор ячеек одного временного слоя, с ним работает только сама разностная схема. А каждое бинарное

дерево хранит «родословную» ячейки списка и путем скрытых методов производит адаптацию сетки по заданному условию.

**Нелинейная задача.** Рассмотрим уравнение теплопроводности (1) в случае, когда  $\chi = \chi(\rho, T) = \chi(T)$ ,  $f(x, t) = 0$ , тогда уравнение переписывается в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \chi \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (4)$$

Одним из аналитических решений представленной задачи является решение в виде «бегущей тепловой волны». Это решение имеет вид:

$$T(x, t) = \begin{cases} (2 \cdot (4t - x))^{1/3}, & \text{при } x < 4t \\ 0, & \text{при } x \geq 4t \end{cases}, \text{ где } x \geq 0. \quad (5)$$

Коэффициент теплопроводности для решения:  $\chi = 6 \cdot T^3$ .

Рассматривается первая краевая задача. Значение температуры на левой границе определяется исходя из точного решения  $T(0, t) = 2t^{1/3}$ . На правой границе задается нулевая температура  $T(X, t) = 0$ .

**Сравнение численных решений на адаптивной и постоянной сетках.** Расчеты проводились на промежутке  $0 \leq x \leq 1$  с варьированием числа ячеек сетки, уровень адаптации – 2,  $t_{\text{кон}} = 0.25$ . Адаптируем сетку в окрестности фронта тепловой волны. Решения, полученные на адаптивной разностной сетке и на основной сетке с числом ячеек  $N = 200$ , представлены на рисунке 1 (в увеличенном масштабе).

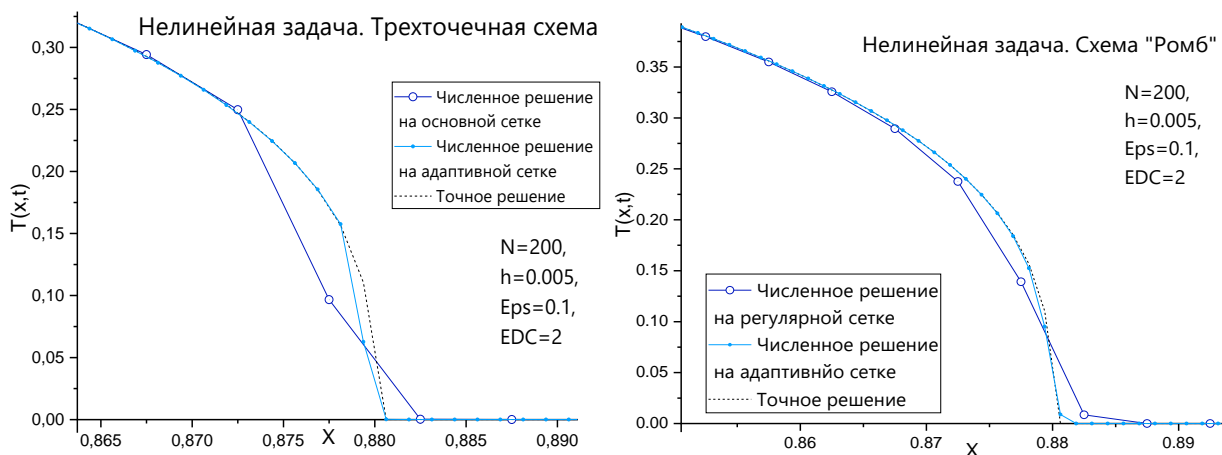


Рис. 1. Профили температур в зависимости от радиуса на момент времени  $t_{\text{кон}} = 0.25$ .

N	h	$\tau$	Разностная норма $L_1$			
			Трехточечная схема		Схема «Ромб»	
			Основные сетки	Адаптивные сетки	Основные сетки	Адаптивные сетки
100	0.01	5e-05	0.00100923	0.000200313	0.00078106	0.000133777
200	0.005	1.25e-05	0.000409666	<b>7.34152e-05</b>	0.000313618	<b>4.91135e-05</b>
400	0.0025	3.125e-06	0.000166046	2.59459e-05	0.000123853	1.89923e-05
800	0.00125	7.8125e-07	<b>6.60853e-05</b>	1.26253e-05	<b>4.98825e-05</b>	9.49039e-06

Таб. 1. Сравнение разностной нормы  $L_1$  при разных шагах по пространству и времени на адаптивных и основных сетках для схемы с весами и схемы «Ромб».

В таблице 1 представлены результаты вычисления нормы  $L_1$  [3] при разных шагах по пространству и времени для исследованных разностных схем. Из таблицы видно, что разностная норма погрешности, полученная на основной сетке в 800 ячеек, соответствует разностной норме, полученной на начальной сетке в 200 ячеек, но с применением методов адаптации.

**Заключение.** Отметим, что и классическая трехточечная схема, и разностная схема «Ромб» - обе сходятся к точному решению с достаточно близкой к друг другу погрешностью. Анализ численных результатов показал, что адаптация разностных сеток в окрестности фронта тепловой волны в случае нелинейной задачи привела к значительному уменьшению нормы погрешности в сравнении с нормой погрешности на исходной разностной сетке. Что в свою очередь говорит о преимуществах использования алгоритмов адаптации для повышения эффективности вычислений при моделировании физических процессов.

#### *Литература:*

1. Алгоритмы: построение и анализ: пер. с англ. / Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест, К. Штайн. - 2-е изд. - М.; СПб.; Киев: Вильямс, 2005. - 1296 с.: ил.
2. Писарев В.Н. Параметрическое семейство схем «Ромб» для одномерного уравнения теплопроводности // Вопросы Атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1986, вып. 2, с. 67-75.
3. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. – 653 с.
4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966, – 724 с.