

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИИ

Баутин С.П., Коваленко А.И.

В докладе рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение параболического типа

$$\rho_t = \alpha \operatorname{div} (\rho^\sigma \nabla \rho), \quad (1)$$

решения которого описывают процесс фильтрации газа в пористом грунте. Здесь ρ – плотность газа, $\sigma = \operatorname{const} > 1$ – показатель политропы газа, давление в газе есть $p = \rho^\sigma$. Такой же вид

$$T_t = \alpha \operatorname{div} (T^\sigma \nabla T) \quad (2)$$

имеет и нелинейное уравнение теплопроводности при степенной зависимости коэффициента теплопроводности $K(T) = \alpha T^\sigma$ от температуры T . Замена $u = \rho^\sigma$ для уравнения (1) и аналогичная замена $u = T^\sigma$ для уравнения (2), а также изменение масштаба времени оба эти уравнения приводят к следующему виду [3]:

$$u_t = u \Delta u + \frac{1}{\sigma} (\nabla u)^2, \quad (3)$$

В данной работе с помощью метода разделения переменных

$$u(t, \mathbf{x}) = \Theta(t) \cdot X(\mathbf{x}); \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n); \quad n \geq 1 \quad (4)$$

построены точные решения уравнения (3):

Нестационарный случай

$$u(t, \mathbf{x}) = \frac{\sigma}{2(n\sigma + 2)} \frac{1}{(1-t)} \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad (5)$$

которое при $n = 1$ совпадает с ранее полученным решением. В случае $n = 1$

$$u(t, x) = \frac{1}{(1-t)} \left\{ \left[\frac{(1+\sigma)}{\sigma} x \right]^{\frac{\sigma}{(1+\sigma)}} + \dots \right\} \quad (6)$$

в виде бесконечного сходящегося в окрестности точки $x = 0$ ряда с нулевой температурой в начале координат.

Стационарный случай

$$u = \left(\frac{\sigma + 1}{\sigma} \right)^n \prod_{i=1}^n x_i^{\frac{\sigma}{\sigma+1}}. \quad (7)$$

$$u(t, x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n X_i(x_i). \quad (8)$$

$$X_i(x_i) = \frac{\sigma + 1}{\sigma} x_i^{\frac{\sigma}{\sigma+1}}; \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

$$X_k(x_k) = \left[\sqrt{\frac{C_{10k}\sigma}{(1+\sigma)}} x_k \right]^{\frac{\sigma}{(1+\sigma)}} + \dots; \quad k = 1, \dots, (n-1) \quad (10)$$

в виде сходящегося при

$$|X|^{(1+\sigma)/\sigma} < C_{10k}$$

ряда, C_{10k} – произвольные положительные постоянные.

$$X_n(x_n) = \left[\sqrt{\frac{C_{10n}\sigma}{(1+\sigma)}} x_n \right]^{\frac{\sigma}{(1+\sigma)}} + \dots \quad (11)$$

в виде сходящегося при

$$|X|^{(1+\sigma)/\sigma} < \frac{C_{10k}}{|\xi|}$$

ряда, C_{10n} – произвольная положительная постоянная.